目录

1A

一开始就提及要实数复数一起讲，豪。这也暗示了复数上的结论不能简单地推广到实数里。

复数的乘法逆元可以证明一下，实际上就是解个方程（A, B 为已知数）:

$$\begin{cases} Ac - Bd = 1 \\ Ad + Bc = 0 \end{cases}$$

实际上，有 $\left(A + \frac{B^2}{A}\right)c = 1$ 和 $\left(\frac{A^2}{B} + B\right)c = \frac{A}{B}$ 两种操作这个等式组的方法，所以只要 A 和 B 不全为 0，方程就总是有解，进而复数 $A + Bi$ 就总是有逆元。

实际上，我更愿意用加粗的 0 来表示：$\mathbf{0} \in \mathbb{F}^n$

嗯哼，代数闭域，这下我理解了，闭其实就是封闭性的意思。例如实数多项式可能不止有实数解，还会有复数解；但复数多项式的解一定是复数。

习题 8，$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 和它的相反数是 $\sqrt{i}$（原谅我用了一些几何上的结论来想象，即使我并不理解它们）

习题 10，甚至都找不到一个 λ 使得 $\lambda(2 - 3i) = 12 - 5i$，更别提……

由于并未定义 $\mathbb{F}^n \cdot \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ 的运算，所以只有习题 15 和习题 16。

1B

向量空间，是一种特殊的代数空间……（不明的呻吟

举了异于 $\mathbb{F}^n$ 的例子，确实能让人体会到向量空间这个概念本身的抽象性。

我去，函数的向量空间 $\mathbb{F}^S$！那三点中的后两点是辅助验证第一点的。

后面的两个唯一似乎有些抽象代数了。

命题 1.30/1.31 得出的结论对向量空间是普适的，不论是什么样的向量空间，也很抽代。

习题 1，$-(-\mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) = (-1 + 1)(-\mathbf{v}) = \mathbf{0} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v})$，两侧加上 $-\mathbf{v}$ 的加法逆元即可

习题 2，假设 $a \neq 0$，那么必然存在 $\frac{1}{a} \in \mathbb{F}$，$a\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 两边同乘 $\frac{1}{a}$ 就得到 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$，命题成立；反之 $a = 0$ 命题就直接成立，

习题 3，存在性显然，而对于唯一性，可以从加法逆元的唯一性出发，满足方程的解一定是 $-\frac{\mathbf{w}-\mathbf{v}}{3}$ 的逆元。

习题 4，硬要说的话空集中没有 $\mathbf{0}$

习题 5，$0\mathbf{v} = [a + (-a)]\mathbf{v} = a\mathbf{v} + (-a)\mathbf{v} = \mathbf{0}$，由于 $a \neq 0$，两边乘上 $\frac{1}{a}$ 即可

习题 6，有点分析味，实际上构造一些反例就行了，比如按照给出的定义来说，$(\infty + \infty) - \infty = 0$，而 $\infty + (\infty - \infty) = \infty$

习题 7，假如 V 是个函数向量空间，那么 V^S 中可能会有满足 $f(S)=g$ 这样的函数作为元素。但实际上只需要考虑由于 $range(f) \in V$（也就是 f 的值域是向量空间中的元素），那么对 f 定义的标量乘法只需要把标量定义为 V 中定义的标量即可。

习题 8，挺 trivial 的，不证了。

习题 7/8 代表的是两种拓展 V 的方向，向量的函数仍能组成向量空间，复向量的构造/推广也能组成向量空间。

1C

1.35 都比较 naive，其中 a 的关键点是 $b \neq 0$ 时乘法就不封闭了，b 书上自己说了，c 的关键点是 0 函数是可微的，且可微函数的线性组合仍是可微函数（由此满足封闭性），d 的关键点是只有 $b=0$ 时 0 函数才在集合中，e 的话按照柯西收敛的语言套就行了。

今天就到这里。